

# ELECTROMAG 3

volume  $dV$  qui contient  
dQ de charge.  $\vec{j}(x+dx, t)$   
 $\vec{j}(x, t)$

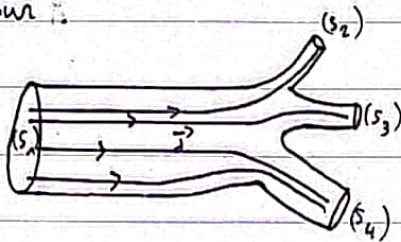
La charge est conservée. Ainsi on a l'équation locale de conservation de la charge :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \vec{j}$ , où  $\vec{j} = \sum n_i q_i \vec{v}_i$ .  
 $\rho$  : densité volumique de charges.

Conséquence :

En régime stationnaire,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{j} = 0$

d'où  $\vec{j}$  est à flux conservatif. En régime stationnaire ;

ainsi  $I_{\text{enlacée}}$  est le même pour toute surface ayant le même contour :



$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \rightarrow \iint_{(S_1)} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_{(S_2)} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_{(S_3)} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_{(S_4)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

i.e  $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$   
Loi des nœuds.

Une particule chargée, plongée dans un champ électrique et magnétique subit une force dite de Lorentz :  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

Maxwell - Gauss

$$* \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$* \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Maxwell - Flux

$$* \text{div } \vec{B} = 0$$

$$* \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Maxwell - Faraday

$$* \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$* \oint \vec{E} \cdot d\vec{P} = -\frac{d}{dt} \left( \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

peut s'écrire

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ Loi de Faraday}$$

Maxwell - Ampère

"courant de déplacement"

$$* \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$* \oint \vec{B} \cdot d\vec{P} = \mu_0 I_{\text{enlacée}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left( \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \right)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{P} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$$

régime permanent

Théorème de Green-Ostrogradski :  $\iint_{(V)} \text{div } \vec{A} = \oint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S}$

Théorème de Stokes :  $\iint_{(V)} \vec{\text{rot}} \vec{A} = \oint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{P}$



si la fonction est  $C^2$ ,

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}$$

Théorème de Schwarz :



$\vec{E}$  et  $\vec{B}$  étant fonctions linéaires de  $\rho$  et  $\vec{j}$ , le champ électromagnétique créé par plusieurs distributions de charges et de courants est la somme vectorielle des champs créés par chaque distribution.

Loi d'Ohm locale:  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$\gamma$  conductivité électrique (en  $S.m^{-1} = \Omega^{-1}.m^{-1}$ )  
 $> 0$  pour tout matériau.

$\gamma_{\text{métaux}} \sim 10^7 S.m^{-1}$

Résistivité d'un matériau, dans le cas où la section  $S$  est constante sur une longueur  $L$  avec  $\vec{j}$  uniforme sur cette section:  $R = \frac{L}{\gamma S}$

Dans les autres cas, repartir de la définition  $R = \frac{U}{I}$  et utiliser la loi d'Ohm locale dans le calcul de  $I$ , et le fait que  $U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

thermique

$\Phi_{th}$

$T$

$\vec{j}_q$

$\vec{j}_q = -\lambda \text{grad } T$  Loi de Fourier

$\lambda$

$R_{th} \left[ = \frac{L}{\lambda S} \text{ (cas simple, usuel)} \right]$

électrique

$I$

$V$

$\vec{j}$

$\vec{j} = -\gamma \text{grad } V$  Loi d'Ohm locale

$\gamma$

$R \left[ = \frac{L}{\gamma S} \text{ (cas simple, usuel)} \right]$

Les charges accumulées sur les bords du conducteur soumis à  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  vont faire que le matériau parcouru par une densité de courant  $\vec{j}$  soumis à un champ magnétique  $\vec{B}$  subit une force de Laplace:

Un volume  $dV$  de matériau subit:  $d\vec{F}_L = \vec{j} dV \wedge \vec{B}$

Pour un circuit filiforme:  $d\vec{F}_L = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$

Les charges reçoivent du champ EM une puissance volumique

$P_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

Pour un conducteur ohmique,  $P_{vol} = \gamma E^2 \geq 0$ : les charges absorbent de l'énergie du champ EM, en pratique dissipée par effet Joule.



L'énergie électromagnétique volumique vaut :

$$\epsilon_{EM, vol} = \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2}_{\text{énergie sous forme électrique}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}}_{\text{énergie sous forme magnétique}}$$

On introduit le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ , pour quantifier le déplacement d'énergie EM.  $\vec{\Pi}$  est un vecteur densité de puissance électromagnétique.

C'est l'analogie de  $\vec{j}_e$  pour l'énergie thermique transportée par conduction, de  $\vec{j}$  pour les charges électriques.

La puissance EM traversant (S) vaut  $P_{EM} = \iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$

$\vec{\Pi}$  a pour direction et sens celui de la propagation de l'énergie EM, et pour norme la puissance EM surfacique, en  $W.m^{-2}$

Bilan local d'énergie EM, i.e. Équation de Poynting :

$$\frac{\partial \epsilon_{EM, vol}}{\partial t} = - \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}}_{\substack{\text{puissance volumique} \\ \text{donnée aux charges par le} \\ \text{champ EM}}} - \text{div } \vec{\Pi}$$

Version intégrale :

$$\frac{d \epsilon_{EM(V)}}{dt} = - \iiint_{(V)} \vec{j} \cdot \vec{E} dV - \oint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

concrètement :

Energie EM présente en moins dans (V) = énergie EM transmise aux charges + celle qui sort de (V)  
= celle perdue (changée de forme) + celle partie.

$$\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} F.m^{-1}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} T.m.A^{-1}$$